Применение двойного интеграла для вычисления площади фигуры, заданной в полярной системе координат

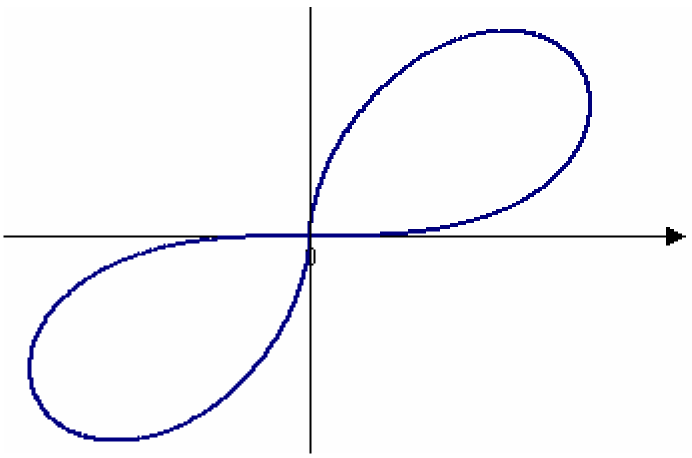
Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной кривой $(x^2+y^2)^3 = a^2x^3y$, заданной уравнением в декартовых координатах.

Перейдем в полярные координаты:

$$\rho^6 = a^2\rho^4\cdot\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi;$$
$$\rho^2 = a^2\cdot\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi$$

Для построения графика необходимо учесть, что $\rho^2 \ge 0$, поэтому $\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi \ge 0$. Для выполнения последнего неравенства необходимо, чтобы $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ были одного знака, что возможно при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ и $\pi \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$.

График будет таким:



$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} \rho d\rho = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2(\varphi)}{2} d\varphi = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\cdot\sin\varphi d\varphi = -a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d(\cos\varphi) =$$
$$= -a^2\cdot\frac{\cos^4\varphi}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{4}.$$