Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка

Решить уравнение $(x^2+1)y' - 2xy = (1+x^2)^2$.

Покажем, что данное уравнение относится к линейным. Для этого обе части разделим на коэффициент при y': $y' - \frac{2x}{x^2+1}y = 1+x^2$. Получили уравнение вида $y' + a(x)y = b(x)$, т.е. линейное. Делаем замену $y = uv$:

$u'v + uv' - \frac{2x}{x^2+1}uv = 1+x^2$. Выносим u за скобки:

$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{x^2+1}v\right) = 1+x^2$. Согласно методу Бернулли функцию $v(x)$ необходимо выбрать так, чтобы $v' - \frac{2x}{x^2+1}v = 0$. Учтем $v' = \frac{dv}{dx}$ и разделим переменные в уравнении $v' - \frac{2x}{x^2+1}v = 0$:

$\frac{dv}{dx} = v\frac{2x}{x^2+1}$, $\frac{dv}{v} = \frac{2xdx}{x^2+1}$. Интегрируя последнее равенство учтем $2xdx = d(x^2+1)$:

$\int\frac{dv}{v} = \int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$, $\ln v = \ln(x^2+1)$, $v = x^2+1$.

Возвращаясь к уравнению $u'v + u\left(v' - \frac{2x}{x^2+1}v\right) = 1+x^2$, учитывая $v' - \frac{2x}{x^2+1}v = 0$ при $v = x^2+1$, получаем: $(x^2+1)u' = 1+x^2$, откуда $u' = 1$, следовательно $u = \int 1dx = x + C$.

Так как $y = uv$, $v = x^2+1$ и $u = x + C$, то $y = (x^2+1)(x+C)$.