Задание 1.

1. Вычислить поток Π_1 векторного поля $\vec{F}$ через поверхность σ в направлении нормали, образующей острый угол с осью OZ. Вычислить по теореме Гаусса-Остроградского поток Π векторного поля $\vec{F}$ через внешнюю сторону поверхности σ. Сделать рисунок.

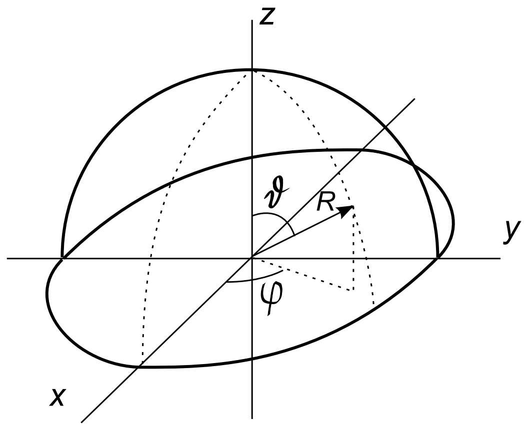

Рис. 1: К задаче 1.

$$\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$$

$$\sigma \left\{ \begin{array}{l} z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Решение:

Преобразуем функцию, которая задает поверхность к виду:

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Поток вектора через замкнутую поверзность состоит из двух слагаемых - потока через полусферу и потока через круг радиуса R:

$$\Pi_1 = \Pi_s + \Pi_c$$

Поток через полусферу:

$$\Pi_s = \int \vec{F}\vec{n}dS$$

где $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности. При неявном задании функции она равна:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

Подставим:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 2z$$

Тогда:

$$\vec{n} = \frac{1}{R}(x, y, z)$$

$$\vec{F}\vec{n} = \frac{1}{R}\left(x^3 + y^3 + z^3\right)$$

Удобно перейти к сферическим координатам:

$$\vec{F}\vec{n} = \frac{r^3}{R}\left(\sin^3\theta\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right) + \cos^3\theta\right)$$

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

Тогда поток:

$$\Pi_s = \int \vec{F}\vec{n}dS = \int \frac{r^5}{R}\left(\sin^3\theta\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right) + \cos^3\theta\right)\sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= R^4 \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\sin^3\theta\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right) + \cos^3\theta\right)$$

Интеграл от первого слагаемого равен нулю как интеграл от нечетной степени тригонометрической функции в пределах $(0, 2\pi)$, тогда:

$$\Pi_s = R^4 \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^3\theta = -2\pi R^4 \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta d\cos\theta = -2\pi R^4 \left.\frac{\cos^4\theta}{4}\right|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^4}{2}$$

Нормаль к кругу равна $\vec{k}$, а вектор $\vec{F}$ на нем - $x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$. Т.о., на круге $\vec{F}\vec{n} = 0$ и полный поток:

$$\Pi_1 = \Pi_S = \frac{\pi R^4}{2}$$

Теперь найдем поток при помощи теоремы Гаусса-Остроградского:

$$\Pi = \int\int\int div\vec{F}dV$$

$$div\vec{F} = 2(x + y + z) = 2r\left(\sin\theta\left(\cos\varphi + \sin\varphi\right) + \cos\theta\right)$$

Подставим:

$$\int\int\int div\vec{F}dV = 2\int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\sin\theta\left(\cos\varphi + \sin\varphi\right) + \cos\theta\right)$$

Аналогично - первое слагаемое дает нулевой вклад. Тогда:

$$\int\int\int div\vec{F}dV = 4\pi \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta = 4\frac{\pi R^4}{4} \left.\frac{\cos^2\theta}{2}\right|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^4}{2}$$

Т.о., вычисление по теореме Гаусса-остроградского дало тот же результат.

2.

3. Проверить является ли поле $\vec{F}$: а) потенциальным, б) соленоидальным. Если поле потенциально, найти его потенциал. Определить наличие источников или стоков.

$$\vec{F} = (3x^2 - yz)\vec{i} + (3y^2 - xz)\vec{j} + xy\vec{k}$$

Решение:

Сначала найдем дивергенцию поля:

$$div\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 6x + 6y$$

Т.о., поле не соленоидально. Найдем ротор:

$$rot\vec{F}_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 2x$$

$$rot\vec{F}_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = -2y$$

$$rot\vec{F}_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$$

В таком случае, поле можно разложить на потенциальную и вихревую составляющие:

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2},\ rot\vec{F_1} = 0,\ div\vec{F_2} = 0$$

Очевидно:

$$\vec{F_1} = 3x^2\vec{i} + 3y^2\vec{j} \to rot\vec{F_1} = 0$$

$$\vec{F_2} = -yz\vec{i} - xz\vec{j} + xy\vec{k} \to div\vec{F_2} = 0$$

Найдем потенциал для $\vec{F_1}$:

$$\varphi = \int \vec{F_1} d\vec{r} = \int 3x^2dx + 3y^2dy = x^3 + y^3 + C$$

Источники расположены в области $div\vec{F} > 0 \to x > -y$, а стоки: $div\vec{F} < 0 \to x < -y$

Задание 2.

1. Вычислить поток Π_1 векторного поля $\vec{F}$ через поверхность σ в направлении нормали, образующей острый угол с осью OZ. Вычислить по теореме Гаусса-Остроградского поток Π векторного поля $\vec{F}$ через внешнюю сторону поверхности σ. Сделать рисунок.

$$\vec{F} = 2x\vec{i} + (x^2 + z^2)\vec{j} + 3z\vec{k}$$

$$\sigma \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases}$$

Решение: Преобразуем функцию, которая задает поверхность к виду:

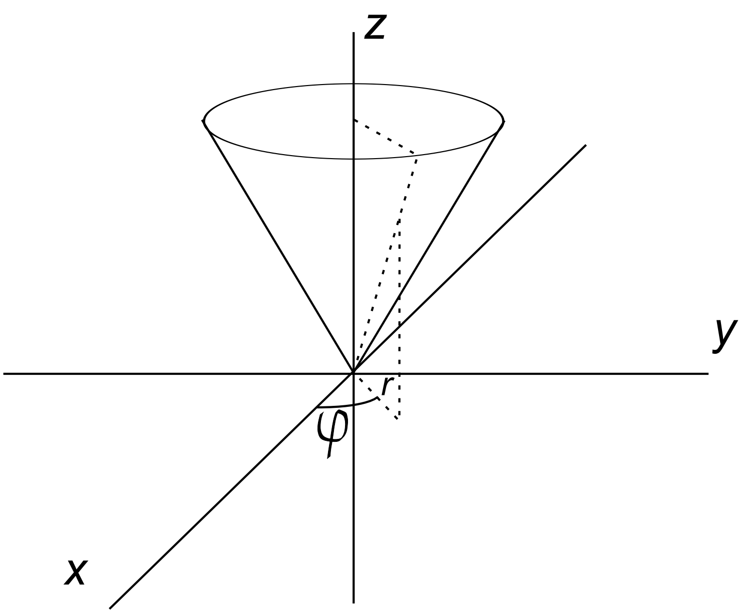

Рис. 2: К задаче 1.

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

Поток вектора через замкнутую поверзность состоит из двух слагаемых - потока через поверхность конуса и потока через круг при $z = 3$:

$$\Pi_1 = \Pi_s + \Pi_c$$

Поток через поверхность конуса:

$$\Pi_s = \int \vec{F}\vec{n}dS$$

где $\vec{n}$ - внешняя нормаль к конусу. При неявном задании функции она равна:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)$$

Подставим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y, \ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -2z$$

Тогда (учитывая, что на поверхности конуса $z = r$):

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}(x, y, -z), \; r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\vec{F}\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\left(2x^2 + y(x^2+r^2) - 3r^2\right)$$

Интегрирование по x и y происходит в симметричных пределах, следовательно, все интегралы с нечетными степенями равны нулю:

$$\Pi_s = \int \frac{1}{\sqrt{2}r}\left(2x^2 - 3r^2\right) dS$$

Элемент площади при переходе к цилиндрическим координатам:

$$dS = rd\varphi\sqrt{2}dz = rd\varphi\sqrt{2}dr$$

Тогда:

$$\Pi_s = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left(2r^2\cos^2\varphi - 3r^2\right) drd\varphi = 2\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^3 \pi - 2\pi \left. r^3\right|_0^3 = -36\pi$$

Найдем поток Π_c:

$$\Pi_c = \int \vec{F}\vec{k}dxdy = 9\int_0^3\int_0^{2\pi} rdrd\varphi = 81\pi$$

Полный поток через замкнутую поверхность:

$$\Pi = \Pi_s + \Pi_c = 45\pi$$

Теперь найдем поток при помощи теоремы Гаусса-Остроградского:

$$\Pi = \int\int\int div\vec{F}dV$$

$$div\vec{F} = 5$$

Подставим:

$$\int\int\int div\vec{F}dV = 5\int dV = 5V$$

где V - объем конуса с основанием радиуса 3 и высотой 3:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = 9\pi \rightarrow \Pi = 5V = 45\pi$$

Т.о., вычисление по теореме Гаусса-остроградского дало тот же результат.

2. Вычислить циркуляцию Γ векторного поля $\vec{F}$ по линии L, результат проверить по теореме Стокса (где это возможно). Сделать рисунок.

$$\vec{F} = (yz - 2x)\vec{i} + (xz - 2y)\vec{j} + xy\vec{k}$$

$$L: \; \Delta ABC, \; A(2,1,1), \; B(1,2,1), \; C(1,1,2)$$

Решение: Определим прямые и их единичные касательные векторы, проходящие через

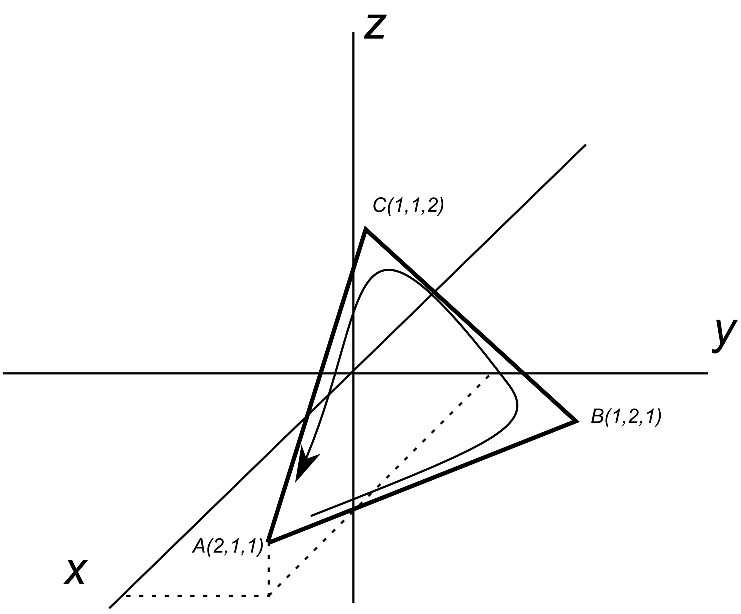

Рис. 3: К задаче 2.

каждую пару точек:

$$AB: \ \vec{e}_1 = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \to x+y=3, \ z=1$$

$$BC: \ \vec{e}_2 = \frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) \to y+z=3, \ x=1$$

$$CA: \ \vec{e}_3 = \frac{\vec{CA}}{|\vec{CA}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) \to x+z=3, \ y=1$$

Интеграл вдоль всего контура:

$$\oint_L \vec{F}d\vec{l} = \int_{AB} \vec{F}d\vec{l} + \int_{BC} \vec{F}d\vec{l} + \int_{CA} \vec{F}d\vec{l}$$

Найдем каждый из этих интегралов, использую найденные касательные векторы:

$$\int_{AB} \vec{F}d\vec{l} = \left\{ d\vec{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-dx, dy, 0) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{AB} -F_x dx + F_y dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{AB} -(yz-2x)dx + (xz-2y)dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_2^1 (3x-3)dx + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^2 (3-3y)dy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \left(3x - 3x^2/2\right)\Big|_1^2 = -3/\sqrt{2}$$

$$\int_{BC} \vec{F}d\vec{l} = \left\{ d\vec{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -dy, dz) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{BC} -F_y dy + F_z dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{BC} (2y-xz)dy + xydz = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_2^1 (3y-3)dy + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^2 (3-z)dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(3x - 3x^2/2\right)\Big|_2^1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(3z - z^2/2\right)\Big|_1^2 = 3/\sqrt{2}$$

$$\int_{CA} \vec{F} d\vec{l} = \left\{ d\vec{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}(dx, 0, -dz) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{CA} F_x dx - F_z dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{CA} (yz - 2x)dx - xydz = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^2 (3 - 3x)dx + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_2^1 (z - 3)dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(3x - 3x^2/2\right)\Big|_1^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(z^2/2 - 3z\right)\Big|_2^1 = 0$$

Полная циркуляция в таком случае:

$$\Gamma = 0$$

Найдем ротор вектора:

$$rot\vec{F}_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = x - x = 0$$

$$rot\vec{F}_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = y - y = 0$$

$$rot\vec{F}_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = z - z = 0$$

Т.о., автоматически по теореме Стокса получаем, что циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю.

3. Проверить является ли поле $\vec{F}$: а) потенциальным, б) соленоидальным. Если поле потенциально, найти его потенциал. Определить наличие источников или стоков.

$$\vec{F} = -3x^2\vec{i} + 2yz\vec{j} + (y^2 - 2z)\vec{k}$$

Решение:

Сначала найдем дивергенцию поля:

$$div\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = -6x + 2z - 2$$

Т.о., поле не соленоидально. Найдем ротор:

$$rot\vec{F}_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 2y - 2y = 0$$

$$rot\vec{F}_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0$$

$$rot\vec{F}_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$$

Т.о., поле потенциально - $rot\vec{F} = 0$. Найдем потенциал для $\vec{F}$:

$$\varphi = \int \vec{F} d\vec{r} = \int -3x^2 dx + 2yzdy + (y^2 - 2z)dz = \int d\left(-x^3 + y^2 z - z^2\right) = -x^3 + y^2 z - z^2 + C$$

Источники расположены в области $div\vec{F} > 0 \to z > 1 + 3x$, а стоки: $div\vec{F} < 0 \to z < 1 + 3x$

Задание 3.

1. Вычислить поток Π_1 векторного поля $\vec{F}$ через поверхность σ в направлении нормали, образующей острый угол с осью OZ. Вычислить по теореме Гаусса-Остроградского поток Π векторного поля $\vec{F}$ через внешнюю сторону поверхности σ. Сделать рисунок.

$$\vec{F} = xy\vec{i} + y^2\vec{j} + x^2\vec{k}$$

$$\sigma \left\{ \begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ z = 1, \ x, y > 0 \end{array} \right.$$

Решение: Поток вектора через замкнутую поверхность состоит из двух слагаемых

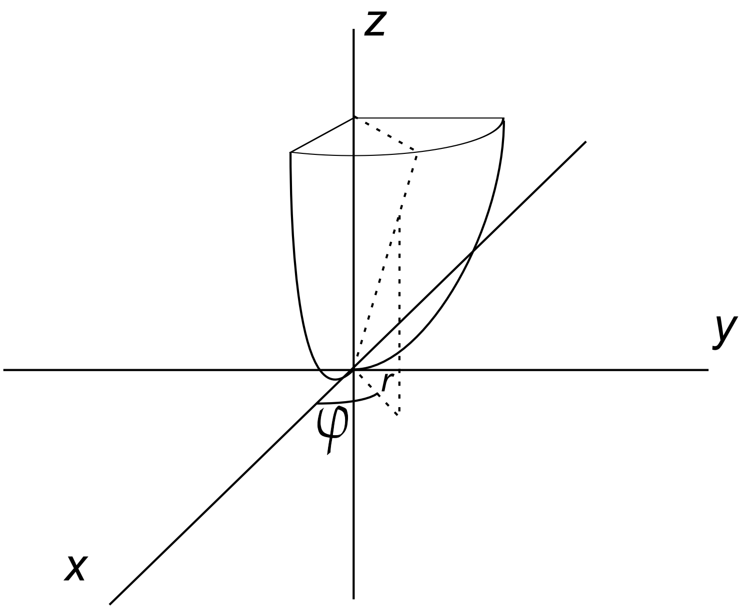

Рис. 4: К задаче 1.

- потока через часть параболоида вращения, потока через четверть круга единичного радиуса и поток через соответствующие части координатных плоскостей:

$$\Pi_1 = \Pi_s + \Pi_c + \Pi_{xz} + \Pi_{yz}$$

Поток через параболоид:

$$\Pi_s = \int \vec{F}\vec{n}dS$$

где $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности. При явном задании функции она равна:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$$

Подставим:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Тогда:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{4r^2 + 1}}(2x, 2y, -1)$$

$$\vec{F}\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{4r^2+1}}\left(2x^2y + 2y^3 - x^2\right)$$

Элемент площади при явном задании функции:

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}dxdy = \sqrt{4r^2+1}dxdy$$

Удобно перейти к цилиндрическим координатам:

$$\vec{F}\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{4r^2+1}}\left(2r^3\cos^2\varphi\sin\varphi + 2r^3\sin^3\varphi - r^2\cos^2\varphi\right) = \frac{1}{\sqrt{4r^2+1}}\left(2r^3\sin\varphi - r^2\cos^2\varphi\right)$$

$$dS = \sqrt{4r^2+1}rdrd\varphi$$

Тогда поток:

$$\Pi_s = \int \vec{F}\vec{n}dS = \int \left(2r^3\sin\varphi - r^2\cos^2\varphi\right)rdrd\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} d\varphi\sin\varphi\int_0^1 r^4dr - \int_0^{\pi/2} d\varphi\cos^2\varphi\int_0^1 r^3dr = \frac{2}{5} - \frac{\pi}{16}$$

Потоки через части координатных поверхностей равны нулю, а поток через четверть круга:

$$\Pi_c = \int \vec{F}\vec{k}dS = \int x^2dxdy = \int_0^1 r^3dr\int_0^{\pi/2} d\varphi\cos^2\varphi = \frac{\pi}{16}$$

Тогда полный поток:

$$\Pi = \frac{2}{5}$$

Теперь найдем поток при помощи теоремы Гаусса-Остроградского:

$$\Pi = \int\int\int div\vec{F}dV$$

$$div\vec{F} = 3y$$

Подставим:

$$\int\int\int div\vec{F}dV = 3\int_0^1 dz\int_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\sqrt{z}} r^2dr = \int_0^1 z^{3/2}dz = \frac{2}{5}$$

Т.о., вычисление по теореме Гаусса-остроградского дало тот же результат.

2.

3. Проверить является ли поле $\vec{F}$: а) потенциальным, б) соленоидальным. Если поле потенциально, найти его потенциал. Определить наличие источников или стоков.

$$\vec{F} = (3x^2y - y^3)\vec{i} + (x^3 - 3xy^2)\vec{j} + 2\vec{k}$$

Решение:

Сначала найдем дивергенцию поля:

$$div\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 6xy - 6xy = 0$$

Т.о., поле является вихревым и не имеет ни источников, ни стоков.