0.1

Решить систему ОДУ:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + z, \\ \dot{y} = 3x - 6y + 3z, \\ \dot{z} = 4x - 16y + 5z; \end{cases}$$

Найдем собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 4 & -16 & 5 \end{pmatrix}$$

Для этого решим уравнение

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 3 & -6-\lambda & 3 \\ 4 & -16 & 5-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - 9\lambda + 9 = 0 \ .$$

Видим что

$$-\lambda^3 + \lambda^2 - 9\lambda + 9 = -(\lambda - 1)(\lambda - 3i)(\lambda + 3i) \ ,$$

значит, уравнение $-\lambda^3 + \lambda^2 - 9\lambda + 9 = 0$ имеет 3 решения:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3i, \lambda_3 = -3i.$$

Найдем собственные вектора матрицы A, решив три СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 4 & -16 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda_j \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \ , j = 1, 2, 3.$$

Решая их методом Гаусса находим:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 + 2i \end{pmatrix} \ , \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -2 - 2i \end{pmatrix} \ .$$

Теперь можно выписать общее решение исходной системы ОДУ:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + C_3 e^{\lambda_3 t} v_3 =$$

$$= C_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2+2i \end{pmatrix} + C_3 e^{-3it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -2-2i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -C_1 e^t + C_2 e^{3it} + C_3 e^{-3it} \\ iC_2 e^{3it} - iC_3 e^{-3it} \\ C_1 e^t + (-2+2i) C_2 e^{3it} + (-2-2i) C_3 e^{-3it} \end{pmatrix} .$$

Это комплексное решение, действительное решение можно вычислить взяв линейные комбинации действительных и мнимых частей комплексного решения:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 e^t + C_2 \cos(3t) + C_3 \cos(3t) + C_2 \sin(3t) - C_3 \sin(3t) \\ -C_2 \sin(3t) + C_3 \sin(-3it) + C_2 \cos(3t) - C_3 \cos(-3t) \\ C_1 e^t - 4C_2 \sin(3t) - 4C_3 \cos(-3t) \end{pmatrix} .$$

0.2

Решить систему ОДУ:

$$\begin{cases} \dot{x} = 6x + 6y - 15z, \\ \dot{y} = x + 5y - 5z, \\ \dot{z} = x + 2y - 2z; \end{cases}$$

Найдем собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Для этого решим уравнение

$$\det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 5-\lambda & -5 \\ 1 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27 = -(\lambda-3)^3 = 0 .$$

Видим что
$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 3.$$
Решение будем искать в виде $x = \alpha e^{\lambda t}$, $y = \beta e^{\lambda t}$, $z = \gamma e^{\lambda t}$:

Найдем собственные вектора матрицы A, решив СЛАУ:
$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \ .$$
Эта система имеет лишь два линейно независимых решения:
$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$
Третье решение найдем подставив $(a_0 + a_1 t)e^{3t}$ в исходную систему. Теперь можно выписать общее решение исходной системы ОДУ:
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (C_2 + C_3 t)e^{3t} \\ (C_1 + C_3 t/3)e^{3t} \\ (6C_1 + 3C_2 - C_3 + 5C_3 t)e^{3t}/15 \end{pmatrix} \ .$$